МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на третий курс

1. ③ Вычислить объём множества

$$G = \left\{ \ (x, y, z) \ : \ (x^2 + y^2 + z^2)^2 \le |z| \ \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

2. ④ Найти минимум функционала

$$J(y) = \int\limits_1^4 \sqrt{x}\,\big(y'(x)\big)^2 \, dx$$

на множестве $M = \left\{ \ y \in C^2[1,4] \ : \ y(1) = 1, \ \ y(4) = 2 \ \right\}$.

3. ④ Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S \frac{dS}{1+z},$$

где поверхность

$$S = \left\{ \ (x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ \ z > x^2 + y^2 \ \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

4. ④ Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(x+y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = (y-2x)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

5. ⑤ Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x-i)^3}\, dx.$$

ОТВЕТЫ И ИНСТРУКЦИЯ ПО ПРОВЕРКЕ

для поступающих на третий курс

1. (3) Вычислить объём множества

$$G = \left\{ \ (x, y, z) \ : \ (x^2 + y^2 + z^2)^2 \le |z| \ \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

Инструкция: В интеграле $\iiint\limits_G dxdydz$ сделан переход к сферическим координатам — 1 очко.

2. (4) Найти минимум функционала

$$J(y) = \int\limits_1^4 \sqrt{x}\,\big(y'(x)\big)^2\, dx$$

на множестве $M = \left\{ \ y \in C^2[1, 4] \ : \ y(1) = 1, \ \ y(4) = 2 \ \right\}$.

Ответ: $\min\limits_{y \in M} J(y) = J\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}$

Инструкция: Найдена единственная допустимая экстремаль — 2 очка. Доказано, что она доставляет минимум функционала — 1 очко. Вычислено минимальное значение функционала — 1 очко.

3. (4) Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S \frac{dS}{1 + z},$$

где поверхность

$$S = \left\{ \ (x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ \ z > x^2 + y^2 \ \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: $2\pi \ln \frac{4}{\sqrt{5}+1}$.

Инструкция: Сделана параметризация поверхности сферическими координатами — 1 очко:

$$x = \cos\varphi \sin\theta, \quad y = \sin\varphi \sin\theta, \quad z = \cos\theta, \quad \cos\theta > \sin^2\theta,$$

$$\varphi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \tfrac{\sqrt{5}-1}{2} < \cos\theta \le 1.$$

Искомый интеграл представлен двойным интегралом Римана — 1 очко:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{\sin\theta\, d\theta}{1 + \cos\theta}.$$

4. ④ Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(x+y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = (y-2x)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $F\left((x+y)^2 - 3x^2\right), \quad \forall\, F \in C^1(\mathbb{R})$.

Инструкция: Записана автономная система для определения первого интеграла — 1 очко:

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{2x-y} = dt.$$

Система преобразована к интегрируемому виду — 1 очко:

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{d(x+y)}{3x} = dt.$$

Найден первый интеграл — 1 очко.

5. ⑤ Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x-i)^3}\,dx.$$

Ответ: $\frac{\pi i}{2e}$

Инструкция: Интеграл преобразован с помощью формулы Эйлера — 1 очко:

$$\frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{(x-i)^3}\,dx - \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{-ix}}{(x-i)^3}\,dx.$$

С помощью леммы Жордана показано, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{-ix}}{(x-i)^3}\,dx = 0 \quad \text{— 1 очко,}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{(x-i)^3}\,dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{ze^{iz}}{(z-i)^2} \quad \text{— 1 очко.}$$

Вычислен полученный вычет — 2 очка:

$$\operatorname*{res}_{z=i} \frac{ze^{iz}}{(z-i)^2} = \frac{1}{2}\left(ze^{iz}\right)''\Big|_{z=i} = \frac{i}{2e}.$$

ОЧКИ	**ОЦЕНКА**
0–2	НЕУД. (1)
3–4	НЕУД. (2)
5–6	УДОВЛ. (3)
7–8	УДОВЛ. (4)
9–10	ХОР. (5)
11–12	ХОР. (6)
13–14	ХОР. (7)
15–16	ОТЛ. (8)
17–18	ОТЛ. (9)
19–20	ОТЛ. (10)